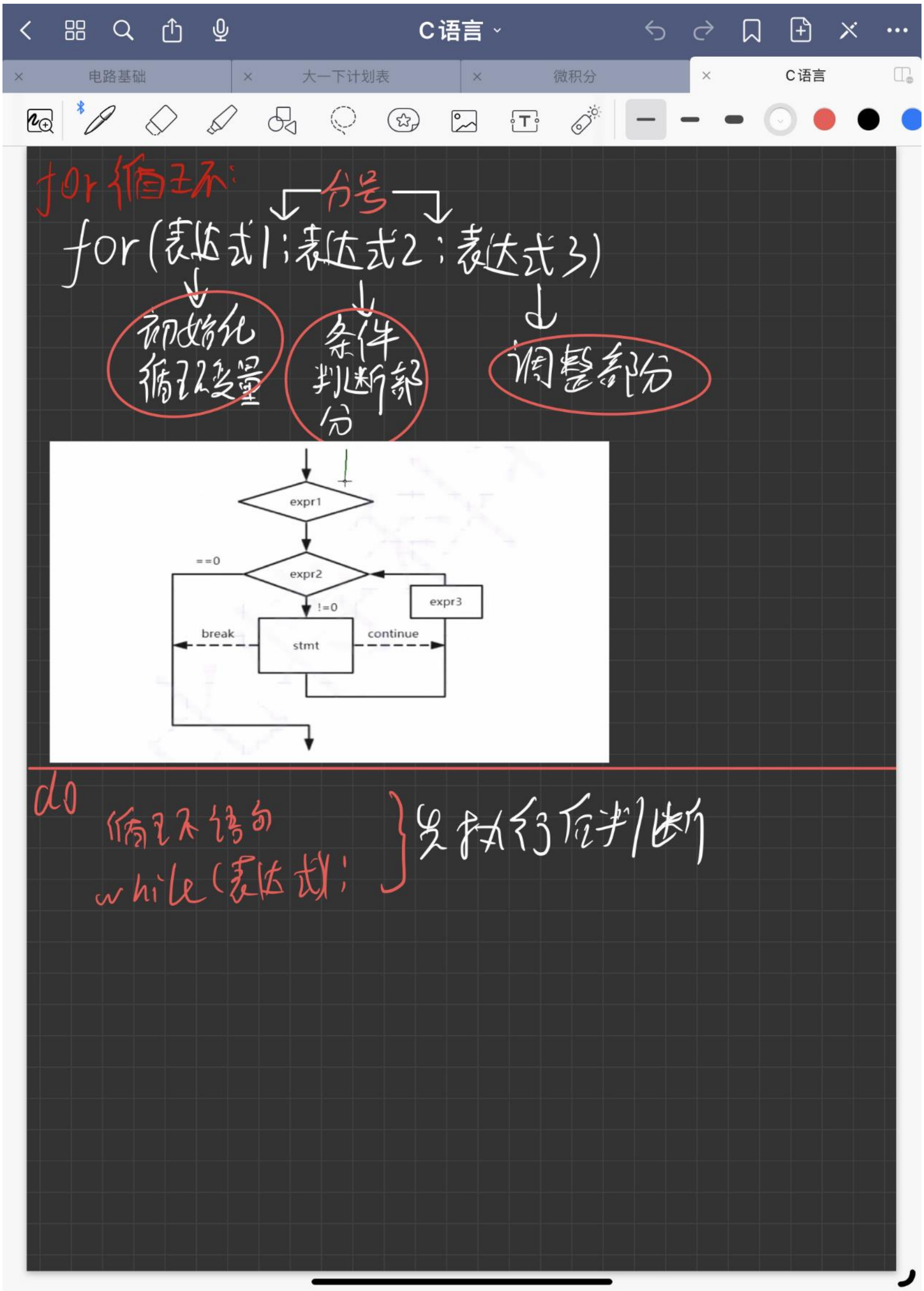
假期学习总结

复习了 c 语言和高数等上学期所学知识，学习了一点离散数学知识。复习军事理论和近代史。初步学习了 python。



则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导,且导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x)=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 设复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 是由三个函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$ 复合而成, 则 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

当然这里假定上式右端所出现的导数在相应点处都存在. 复合函数的求导法则称为**链式求导法则**.

例 7 设函数 $y=\ln\cos x$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y=\ln\cos x$ 可以看成是由 $y=\ln u$, $u=\cos x$ 复合而成, 因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin x)=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x.$$

例 8 设 $y=\sin(1-3x^2)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y=\sin(1-3x^2)$ 可以看成是由 $y=\sin u$, $u=1-3x^2$ 复合而成, 因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot(-6x)=-6x\cos(1-3x^2).$$

例 9 设 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 可以看成是由 $y=e^u$, $u=\sin v$, $v=\frac{1}{x}$ 复合而成, 因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=e^u\cdot\cos v\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}.$$

从以上例子可以看出, 应用复合函数求导法则时, 首先要分析所给函数可由哪些函数复合而成, 或者说, 看所给函数能分解成哪些函数, 然后再应用复合函数求导法则求所给函数的导数.

对复合函数的分解比较熟练后, 求复合函数的导数就可以不必写出中间变量, 而直接写出函数对中间变量求导的结果, 再乘上中间变量对自变量的导数.

例 10 已知 $y=\arccos\sqrt{2x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=(\arccos\sqrt{2x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}(\sqrt{2x})'$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot\frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}(2x)'$$

例 11 求 $y=\ln|x|$ 的导数.

解 当 $x>0$ 时, $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$;

当 $x<0$ 时, $(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$, 因此

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}.$$

例 12 求 $y=\sin^4(5x^2)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=4\sin^3(5x^2)(\sin(5x^2))'=4\sin^3(5x^2)\cdot\cos(5x^2)\cdot(5x^2)'$$

$$=40x\sin^3(5x^2)\cos(5x^2).$$ $4\sin^3(5x^2)\cdot\cos(5x^2)\cdot10x.$

$40x\sin^3(5x^2)\cdot\cos(5x^2)$

例 13 求双曲函数的导数.

解 $$(\mathrm{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}[(e^x)'-(e^{-x})']$$

$$=\frac{1}{2}[e^x-e^{-x}(-x)']=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\mathrm{ch}x.$$

$$(\mathrm{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\mathrm{sh}x.$$

$$(\mathrm{th}x)'=\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}\right)'=\frac{(\mathrm{sh}x)'\mathrm{ch}x-\mathrm{sh}x(\mathrm{ch}x)'}{\mathrm{ch}^2x}$$

$$=\frac{\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x}{\mathrm{ch}^2x}=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}.$$

例 14 求反双曲函数的导数.

解 $$(\mathrm{arsh}x)'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot2x\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

同理可得

$$(\mathrm{arch}x)'=[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad x\in(1,+\infty).$$

$(a*b)*c=a*(b*c)$

(1) $(A,*)$是半群吗? √

$a*b\neq b*a$

(2) $(A,*)$是可换半群吗? ×

(3) $(A,*)$有单位元素吗? $a*e\neq e*a\neq a$ ×

6.3 证明:若$(G,*)$是阿贝尔群,则对任意$a,b\in G$必有$(a*b)^n=a^n*b^n$.

6.4 下列代数系统$(G,*)$中哪些构成群?如构成群,给出其单位元素以及每个元素的逆元素.

(1) $G=\{1,10\}$, $*$是按模11的乘法; $(a\times b)/11$ √ 单位元素:1. 逆元素 $1\to1$ $10\to10$

(2) $G=\{1,3,4,5,9\}$, $*$是按模11的乘法;

(3) $G=\mathbf{Q}$, 有理 $*$是通常的加法; √ 单位元素:0. 逆元素:$-x$

(4) $G=\mathbf{Q}$, $*$是通常的乘法; √ 单位元素:1 逆元素:$\frac{1}{x}$

(5) $G=\mathbf{Z}$, $*$是通常的减法. ×

6.5 试证:若群的每个元素的逆元素都是它自己,则该群必是阿贝尔群.

6.6 证明:阶为偶数的循环群中周期为2的元素个数一定是奇数.

6.7 设$(G,*)$是阶为6的群,证明它至多有一个阶为3的子群.

6.8 证明:阶是素数的群必是循环群.

6.9 找出$(\mathbf{Z}_{12},+_{12})$的所有子群.

6.10 求$(\mathbf{Z}_8,+_8)$中子群$H=\{[0],[4]\}$的左陪集和右陪集,并问其左、右陪集是否相等.

6.11 试证:两个正规子群的交集仍构成正规子群.

9. 一阶子群 $(\{[0]\},+_{12})$

二阶子群 $(\{[0],[6]\},+_{12})$

三阶子群 $(\{[0],[4],[8]\},+_{12})$

四阶子群 $(\{[0],[3],[6],[9]\},+_{12})$

六阶子群 $(\{[0],[2],[4],[6],[8],[10]\},+_{12})$

十二阶子群 $(Z_{12},+_{12})$

10. $(Z_8,+_8)$ $Z_8=\{[0],[1],\cdots[7]\}$

子群 $\{[0],[4]\}$

$[0]H=[0]+\{[0],[4]\}=\{[0][4]\}$ $H[0]=$

$[1]H=[1]+\{[0],[4]\}=\{[1],[5]\}$

$[2]H=\ \cdots\ =\{[2],[6]\}$

$[3]H=\ \cdots\ =\{[3],[7]\}$

$\cdots$

$[6]H=\ \cdots\ =\{[6],[2]\}$

$[7]H=\ \cdots\ =\{[7],[3]\}$